

华中师范大学第一附属中学 2021 届高考押题卷

理科数学

本试题卷共 4 页,22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 M, N 为 $\mathbf{R}$ 的两个不相等的非空子集,若 $(\complement_{\mathbf{R}} N) \subseteq (\complement_{\mathbf{R}} M)$, 则下列结论中正确的是
A. $\forall x \in N, x \in M$ B. $\exists x \in M, x \notin N$ C. $\exists x \notin N, x \in M$ D. $\forall x \in M, x \notin \complement_{\mathbf{R}} N$
2. 已知抛物线 $y = mx^2 (m > 0)$ 上的点 $(x_0, 2)$ 到该抛物线焦点 F 的距离为 $\frac{17}{8}$, 则 $m =$
A. 1 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}$
3. 为了贯彻落实《中共中央国务院全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》的文件精神,某学校结合自身实际,推出了《植物栽培》《手工编织》《实用木工》《实用电工》《烹饪技术》五门校本劳动选修课程,要求每个学生从中任选三门进行学习,学生经考核合格后方能获得该学校荣誉毕业证,则甲、乙两人的选课中仅有一门课程相同的概率为
A. $\frac{3}{25}$ B. $\frac{1}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{3}{5}$
4. 已知 S_n 是等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若存在 $m \in \mathbf{N}^*$, 满足 $\frac{S_{2m}}{S_m} = 9, \frac{a_{2m}}{a_m} = \frac{5m+1}{m-1}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为
A. -2 B. 2 C. -3 D. 3
5. 已知大气压强 $p = \frac{\text{压力}}{\text{受力面积}}$, 它的单位是“帕斯卡”(Pa, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$), 大气压强 $p(\text{Pa})$ 随海拔高度 $h(\text{m})$ 的变化规律是 $p = p_0 e^{-kh} (k = 0.000126)$, p_0 是海平面大气压强. 已知在某高山 A_1, A_2 两处测得的大气压强分别为 p_1, p_2 , 且 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2}$, 那么 A_1, A_2 两处的海拔高度的差约为(参考数据: $\ln 2 \approx 0.693$)
A. 550m B. 1818m C. 5500m D. 8732m
6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, $\angle BAD = 60^\circ, AB = 4, AD = 3$, 且 $\overrightarrow{CP} = 3\overrightarrow{PD}$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} =$
A. 5 B. 6 C. 7 D. 10
7. 已知函数 $f(x) = \log_3(9^x + 1) - x$, 设 $a = f(\frac{1}{10}), b = f(-e^{-\frac{9}{10}}), c = f(\ln \frac{11}{10})$, 则 a, b, c 的大小关系为
A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$
8. 斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线 l 经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左焦点 F_1 , 交双曲线两条渐近线于 A, B 两点, F_2

为双曲线的右焦点且 $|AF_2| = |BF_2|$, 则双曲线的渐近线方程为

- A. $y = \pm x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm 2x$ D. $y = \pm \frac{1}{2}x$

9. 已知复数 $z = \cos 140^\circ + i \sin 140^\circ$, i 为虚数单位, 则下列说法错误的是

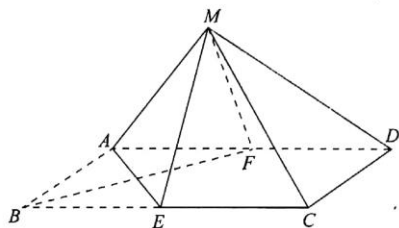
- A. z 的虚部为 $i \sin 140^\circ$ B. z 在复平面上对应的点位于第二象限
C. $z = \frac{1}{\bar{z}}$ D. $z^3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

10. 为庆祝中国共产党成立 100 周年, A、B、C、D 四个兴趣小组举行党史知识竞赛, 每个小组各派 10 名同学参赛, 记录每名同学失分(均为整数)情况, 若该组每名同学失分都不超过 7 分, 则该组为“优秀小组”, 已知 A、B、C、D 四个小组成员失分数据信息如下, 则一定为“优秀小组”的是

- A. A 组中位数为 2, 极差为 8 B. B 组平均数为 2, 众数为 2
C. C 组平均数为 1, 方差大于 0 D. D 组平均数为 2, 方差为 3

11. 如图, 矩形 ABCD 中, 已知 $AB=2$, $BC=4$, E 为 BC 的中点, 将 $\triangle ABE$ 沿着 AE 向上翻折至 $\triangle MAE$ 得到四棱锥 $M-AECD$, 平面 AEM 与平面 AECD 所成锐二面角为 α , 直线 ME 与平面 AECD 所成角为 β , 则下列说法错误的是

- A. 若 F 为 AD 中点, 则 $\triangle ABE$ 无论翻折到哪个位置都有平面 $AEM \perp$ 平面 MBF
B. 若 Q 为 MD 中点, 则 $\triangle ABE$ 无论翻折到哪个位置都有 $CQ \parallel$ 平面 AEM
C. $\sqrt{2} \sin \alpha = \sin \beta$
D. 存在某一翻折位置, 使 $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$



12. 已知函数 $f(x) = |\sin x| + |\cos x| - \sin 2x - 1$, 则下列说法错误的是

- A. $f(x)$ 是以 π 为周期的函数
B. $x = \frac{\pi}{2}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴
C. 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $\sqrt{2} - 2$
D. 若函数 $f(x)$ 在 $(0, M\pi)$ 上恰有 2021 个零点, 则 $\frac{2021}{2} < M \leq 1011$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. $(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}})^n$ 的展开式中, 只有第 9 项的二项式系数最大, 则展开式中 x 的幂的指数为整数的项共有 _____ 项.

14. 写出一个定义在 $\mathbf{R}$ 上且使得命题“若 $f'(1) = 0$, 则 1 为函数 $f(x)$ 的极值点”为假命题的函数 $f(x) =$ _____.

15. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的五个顶点都在球 O 的表面上, 若底面 $ABCD$ 是梯形, 且 $CD \parallel AB$, $AD = BC = CD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$, 则当球 O 的表面积最小时, 四棱锥 $P-ABCD$ 的高的最大值为 _____.

16. 设 $a_n = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \cdots + \frac{n^2}{2n-1}$, $b_n = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \cdots + \frac{n^2}{2n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$), 记最接近 $a_n - b_n$ 的整数为 c_n , 则 $c_{505} =$ _____; $c_n =$ _____ (用 n 表示)

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

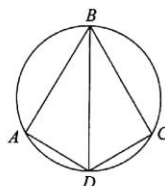
(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知平面四边形 $ABCD$ 内接于圆 O , $AB=BC=3$, $\angle ABC=60^\circ$.

(1) 若 $CD=\sqrt{3}$, 求 $\angle ABD$ 所对的圆弧 $\widehat{AD}$ 的长;

(2) 求四边形 $ABCD$ 面积的最大值.

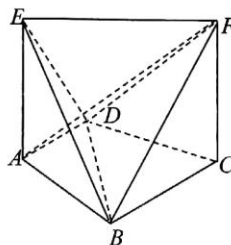


18. (12 分)

七面体玩具是一种常见的儿童玩具. 在几何学中, 七面体是指由七个面组成的多面体, 常见的七面体有六角锥、五角柱、正三角锥柱、Szilassi 多面体等. 在拓扑学中, 共有 34 种拓扑结构明显差异的凸七面体, 它们可以看作是由一个长方体经过简单切割而得到的. 在如图所示的七面体 $EABCFD$ 中, $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel FC$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$, $AD=AB=2$, $BC=FC=EA=4$.

(1) 在该七面体中, 探究以下两个结论是否正确. 若正确, 给出证明; 若不正确, 请说明理由: ① $EF \parallel$ 平面 $ABCD$; ② $AF \perp$ 平面 EBD ;

(2) 求该七面体的体积.



19. (12 分)

某市消防部门对辖区企业员工进行了一次消防安全知识问卷调查, 通过随机抽样, 得到参加问卷调查的 500 人 (其中 300 人为女性) 的得分 (满分 100) 数据, 统计结果如表所示:

得分	$[40, 50)$	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$	$[90, 100]$
男性人数	20	60	40	40	30	10
女性人数	10	70	60	75	50	35

(1) 把员工分为对消防知识“比较熟悉” (不低于 70 分的) 和“不太熟悉” (低于 70 分的) 两类, 请完成如下 2×2 列联表, 并判断是否有 99% 的把握认为该企业员工对消防知识的熟悉程度与性别有关?

	不太熟悉	比较熟悉	合计
男性			
女性			
合计			

(2) 为增加员工消防安全知识及自救、自防能力, 现将企业员工分成两人一组开展“消防安全技能趣味知识”竞赛. 在每轮比赛中, 小组两位成员各答两道题目, 若他们答对题目个数和不少于 3 个, 则小组积 1 分, 否则积 0 分. 已知 A 与 B 在同一小组, A 答对每道题的概率为 p_1 , B 答对每道题的概率为 p_2 , 且 $p_1 + p_2 = 1$, 理论上至少要进行多少轮比赛才能使 A, B 所在的小组的积分的期望值不少于 5 分?

附: 参考公式及 K^2 检验临界值表

$P(k^2 \geq k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

$$k^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n=a+b+c+d.$$

20. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1) + mx^2, m > 0$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线斜率为 $\frac{13}{2}$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) $g(x) = f(x) - \sin x$, 若 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点, 求 m 的取值范围.

21. (12分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, F_1, F_2 分别是椭圆的左、右焦点, P 是椭圆上的动点, 直线 PF_1 交椭圆于另一点 M , 直线 PF_2 交椭圆于另一点 N , 当 P 为椭圆的上顶点时, 有 $|PM| = |MF_2|$.

(1) 求椭圆 E 的离心率;

(2) 求 $\frac{S_{\triangle PF_1 F_2}}{S_{\triangle PMN}}$ 的最大值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10 分)

已知圆 O_1 的圆心为 $(2, 1)$, 半径为 $\sqrt{5}$, 在以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 圆 O_2 的方程为 $\rho = 2R \sin \theta$.

(1) 求圆 O_1 的极坐标方程;

(2) 若圆 O_1 与圆 O_2 的公共弦长为 $3\sqrt{2}$, 求圆 O_2 的极坐标方程.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10 分)

已知 $f(x) = |2-ax| - |x+1|$.

(1) 若 $a=1$, 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 1$;

(2) 若 $x \geq 1$ 时, $f(x) \leq x^2$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

华中师范大学第一附属中学 2021 届高三押题卷

理科数学参考答案和评分标准

一、选择题:

1.【答案】D

【解析】由已知 $(\complement_{\mathbb{R}} N) \subseteq (\complement_{\mathbb{R}} M)$ 得: $M \subseteq N$, 得答案为 D.

2.【答案】B

【解析】点 $(x_0, 2)$ 到焦点 F 的距离等于到准线 $y = -\frac{1}{4m}$ 的距离, 则 $2 + \frac{1}{4m} = \frac{17}{8}$, 解得 $m = 2$.

3.【答案】C

【解析】 $P = \frac{C_5^1 C_4^2}{C_5^3 C_5^3} = \frac{3}{10}$.

4.【答案】B

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 若 $q = 1$, 则 $\frac{S_{2m}}{S_m} = 2$, 与题中条件矛盾, 故 $q \neq 1$.
$$\therefore \frac{S_{2m}}{S_m} = \frac{\frac{a_1(1-q^{2m})}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^m)}{1-q}} = q^m + 1 = 9, \therefore q^m = 8. \therefore \frac{a_{2m}}{a_m} = \frac{a_1 q^{2m-1}}{a_1 q^{m-1}} = q^m = 8 = \frac{5m+1}{m-1}, \therefore m = 3, \therefore q^3 = 8, \therefore q = 2. \text{ 故}$$

选 B.

5.【答案】C

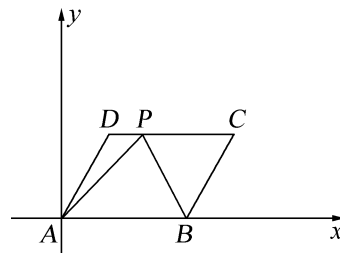
【解析】设 A_1, A_2 两处的海拔高度分别为 h_1, h_2 , 则 $\frac{p_1}{p_2} = \frac{1}{2} = \frac{p_0 e^{-h_1}}{p_0 e^{-h_2}} = e^{k(h_2 - h_1)}$,
$$\therefore h_2 - h_1 = \frac{-\ln 2}{0.000126} \approx \frac{-0.693}{0.000126} = -5500\text{m}.$$

6.【答案】D

【解析】方法一: 由题知 $\overrightarrow{DP} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}$, 则 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DP} =$

$$|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AD}| \cos 60^\circ + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times 16 = 10. \text{ 故选 D.}$$
方法二: 如图, 以 A 为原点, AB 所在直线为 x 轴, 过点 A 且垂直于 AB 的直线为 y 轴, 建立直角坐标系, 则 $A(0, 0), B(4, 0), D(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \therefore \overrightarrow{CP} = 3$

$$\overrightarrow{PD}, \therefore |\overrightarrow{DP}| = 1, \therefore P(\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \therefore \overrightarrow{AP} = (\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}), \overrightarrow{AB} = (4, 0), \therefore \overrightarrow{AP} \cdot$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{2} \times 4 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 0 = 10. \text{ 故选 D.}$$


7.【答案】C

【解析】 $\because f(x) = \log_3(9^x + 1) - x = \log_3(3^x + 3^{-x}), \therefore f(x)$ 为偶函数且在 $(0, +\infty)$ 上为增函数,则 $b = f(-e^{-\frac{9}{10}}) = f(e^{-\frac{9}{10}}), \therefore e^x - x - 1 \geq 0$ (当且仅当 $x = 0$ 时取等号), $\therefore e^x > x + 1 (x \neq 0)$,故 $e^{-\frac{9}{10}} > -\frac{9}{10} + 1 = \frac{1}{10}$, 即 $b > a; \therefore \ln x - x + 1 \leq 0$ (当且仅当 $x = 1$ 时取等号),

$\therefore \ln x < x - 1 (x \neq 1), \therefore \ln \frac{11}{10} < \frac{11}{10} - 1 = \frac{1}{10}, \therefore a > c$. 综上 $b > a > c$. 故选 C.

8. 【答案】D

【解析】设 AB 的中点为 M , 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), M(x_0, y_0)$, 则 $\begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 0 \\ \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0 \end{cases}, \therefore \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} -$

$\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2} = 0$, 则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = \frac{b^2}{a^2}, \therefore k_{OM} = \frac{3b^2}{a^2}$, 设直线 AB 的倾斜角为 $\theta, \therefore |AF_2| = |BF_2|$,

$\therefore AB \perp MF_2, \therefore |OM| = |OF_1| = |OF_2|$, 则 OM 的斜率为 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times \frac{1}{3}}{1 - (\frac{1}{3})^2} = \frac{3}{4}, \therefore \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{4},$

$\therefore$ 双曲线的渐近线方程为 $y = \pm \frac{1}{2}x$, 故选 D.

9. 【答案】A

【解析】由虚部概念知 A 错误; 由 $\cos 140^\circ < 0, \sin 140^\circ > 0$, B 正确; 由 $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = 1$, C 正确;

$\therefore z^2 = \cos^2 140^\circ - \sin^2 140^\circ + 2i \sin 140^\circ \cos 140^\circ = \cos 280^\circ + i \sin 280^\circ,$

$\therefore z^3 = z^2 \cdot z = \cos 420^\circ + i \sin 420^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, D 正确.

10. 【答案】D

【解析】对 A, 因为中位数为 2, 极差为 8, 故最大值大于 7. 故 A 错误;

对 B, 失分数据分别为 0, 0, 0, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 8, 则满足平均数为 2, 众数为 2, 但不满足每名同学失分都不超过 7 分, 故 B 错误;

对 C, 失分数据分别为 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 9, 则满足平均数为 1, 方差大于 0, 但不满足每名同学失分都不超过 7 分, 故 C 错误;

对 D, 利用反证法, 假设有一同学失分超过 7 分, 则方差大于 $\frac{1}{10} \times (8 - 2)^2 = 3.6 > 3$. 与题设矛盾, 故每名同学失分都不超过 7 分. 故 D 正确.

11. 【答案】C

【解析】若 F 为 AD 中点, 连接 BF 交 AE 于点 H , 则 $AE \perp$ 面 MBF , 又 $AE \subset$ 面 MAE , 所以平面 $AEM \perp$ 平面 MBF , A 正确;

取 AM 中点 P , 则 $PQ \parallel \frac{1}{2}AD$, 又 $CE \parallel \frac{1}{2}AD, \therefore PQ \parallel CE$,

$\therefore CQ \parallel EP$, B 正确;

过 M 作 $MO \perp$ 平面 $AECD$, 则 O 在 BF 上, 所以平面 AEM 与平面 $AECD$ 所成锐二面角为 $\angle MHB$ (或其补角), $\therefore \sin \alpha = \frac{MO}{MH}, \sin \beta = \frac{MO}{ME} = \frac{MO}{\sqrt{2}MH}, \therefore \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \beta$, C 错误;

若 $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$, 又 $\cos \alpha = \frac{OH}{MH}, \cos \beta = \frac{OE}{ME} = \frac{OE}{\sqrt{2}MH}$, 则 $OE = 2OH$, D 正确

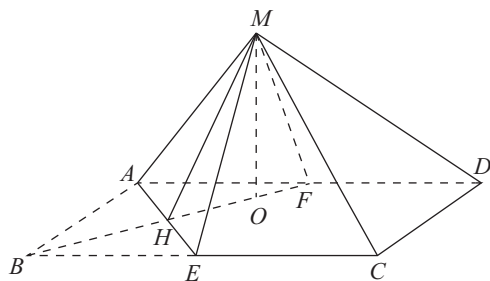
若 $\sqrt{2} \cos \alpha = \cos \beta$, 又 $\cos \alpha = \frac{OH}{MH}, \cos \beta = \frac{OE}{ME} = \frac{OE}{\sqrt{2}MH}$, 则 $OE = 2OH$, D 正确

12. 【答案】B

【解析】因为 $f(x + \pi) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数, A 正确;

又 $f(\pi - x) = |\sin x| + |\cos x| + \sin 2x - 1 \neq f(x)$, B 错误;

由 A 知只需考虑 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的最大值.



①当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 令 $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})$, 则 $t \in [1, \sqrt{2}]$, $f(x) = -t^2 + t = u(t)$, 易知 $u(t)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减, 所以, $f(x)$ 的最大值为 $u(1) = 0$, 最小值为 $u(\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 2$.

②当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, 令 $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})$, 则 $t \in [1, \sqrt{2}]$, $f(x) = t^2 + t - 2 = v(t)$, 易知 $v(t)$ 在区间 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递增, 所以, $f(x)$ 的最大值为 $v(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$, 最小值为 $v(1) = 0$.

综合可知: 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{2}$, 最小值为 $\sqrt{2} - 2$, C 正确;

因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数, 可以先研究函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上的零点个数, 易知 $f(\pi) = 0$.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 令 $f(x) = u(t) = -t^2 + t = 0$, 解得 $t = 0$ 或 1 ,

$t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上无解, $t = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}]$ 上仅有一解 $x = \frac{\pi}{2}$.

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, 令 $f(x) = v(t) = t^2 + t - 2 = 0$, 解得 $t = -2$ 或 1 .

$t = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = -2$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上无解, $t = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) = 1$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上也无解.

综合可知: 函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上有两个零点, 分别为 $x = \frac{\pi}{2}$ 和 $x = \pi$.

又因为 $f(x)$ 是以 π 为周期的函数, 所以, 若 $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $f(x)$ 在 $(0, n\pi]$ 上恰有 $2n$ 个零点.

又已知函数 $f(x)$ 在 $(0, M\pi)$ 上恰有 2021 个零点, 所以 $\frac{2021}{2} < M \leq 1011$, D 正确.

二、填空题

13. 【答案】5

【解析】由已知 $n = 16$, 展开式通项 $T_{r+1} = C_n^r (\sqrt{x})^{n-r} (\frac{1}{2\sqrt{x}})^r = C_n^r (\frac{1}{2})^r x^{\frac{n}{2} - \frac{3r}{4}}$, 则 $r = 0, 4, 8, 12, 16$ 共 5 项.

14. 【答案】 $(x-1)^3$ (答案不唯一)

15. 【答案】 $\sqrt{5}$

【解析】球心在平面 $ABCD$ 上射影落在四边形 $ABCD$ 外接圆圆心处 (即 AB 中点), 设球心 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d , 则由 $R^2 = d^2 + \frac{1}{4}AB^2 = d^2 + 5 \geq 5$ 得, 外接球半径最小值为 $\sqrt{5}$, 当 $PO \perp$ 面 $ABCD$ 时, 高最大为 $\sqrt{5}$.

16. 【答案】253; $\begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$

【解析】 $a_{505} = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \dots + \frac{505^2}{1009}$, $b_{505} = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \dots + \frac{504^2}{1009} + \frac{505^2}{1011}$,

$\therefore a_{505} - b_{505} = 1 + \frac{2^2 - 1^2}{3} + \frac{3^2 - 2^2}{5} + \dots + \frac{505^2 - 504^2}{1009} - \frac{505^2}{1011} = 505 - \frac{505^2}{1011} = \frac{505 \times 506}{505 + 506}$

$\therefore \frac{2}{506} < \frac{1}{a_{505} - b_{505}} = \frac{1}{505} + \frac{1}{506} < \frac{2}{505}$

$\therefore 252.5 < a_{505} - b_{505} < 253$

$\therefore c_{505} = 253$.

$a_n - b_n = n - \frac{n^2}{2n+1} = \frac{n^2 + n}{2n+1}$

$$\therefore \frac{1}{a_n - b_n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \in \left(\frac{2}{n+1}, \frac{2}{n} \right)$$

$$\therefore \frac{n}{2} < a_n - b_n < \frac{n+1}{2}$$

若 $n=2k (k \in \mathbf{N}^*)$, 则 $c_n = k = \frac{n}{2}$,

若 $n=2k-1 (k \in \mathbf{N}^*)$, 则 $c_n = k+1 = \frac{n+1}{2}$,

$$\therefore c_n = \begin{cases} \frac{n}{2} & n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+1}{2} & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

三、解答题

17.【解析】

(1) 连接 AC , $AB=BC=3$, $\angle ABC=60^\circ$, $\therefore AC=3$ (1 分)

又 $\angle ADC=120^\circ$, 在 $\triangle ACD$ 中由余弦定理, $\cos 120^\circ = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}$, 即 $-\frac{1}{2} = \frac{AD^2 - 6}{2\sqrt{3}AD}$, $\therefore AD = \sqrt{3}$
..... (3 分)

又 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 $R = \frac{AC}{2\sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ (4 分)

$\therefore \triangle OAD$ 为正三角形, $\angle AOD = \frac{\pi}{3}$

$\therefore \angle ABD$ 所对的圆弧 $\widehat{AD} = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ (6 分)

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理 $\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD}$

即 $AD^2 + CD^2 + AD \cdot CD = 9$, (8 分)

又 $AD^2 + CD^2 \geq 2AD \cdot CD$, $\therefore 9 - AD \cdot CD \geq 2AD \cdot CD$

$\therefore AD \cdot CD \leq 3$ 当且仅当 $AD=CD=\sqrt{3}$ 时等号成立 (10 分)

$\therefore S_{ABCD} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin 60^\circ + \frac{1}{2}AD \cdot DC \cdot \sin 120^\circ \leq \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$,

所以四边形 $ABCD$ 面积的最大值为 $3\sqrt{3}$ (12 分)

18.【解析】

(1) 结论①正确, 结论②错误, 理由如下: (1 分)

对于结论①, 因为 $EA \parallel FC$ 且 $FC=EA=4$, 连接 AC , 所以四边形 $EACF$ 是平行四边形,

所以 $EF \parallel AC$, 因为 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$,

$\therefore EF \parallel$ 平面 $ABCD$, $\therefore$ 结论①正确 (3 分)

对于结论②, 若 $AF \perp$ 平面 EBD , 则 $AF \perp BD$,

因为 $EA \perp$ 平面 $ABCD$, $EA \parallel FC$, 所以 $FC \perp$ 平面 $ABCD$,

所以 $FC \perp BD$, 又因为 $AF \cap FC = F$, 所以 $BD \perp$ 平面 AFC ,

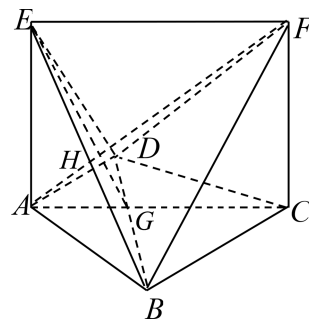
所以 $BD \perp AC$, 而在梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$,

$AD=AB=2$, $BC=4$, 所以 $CD=2\sqrt{2} \neq BC$, 与 $BD \perp AC$ 矛盾

所以结论②错误. (6 分)

(2)方法一:连接 AC , 交 BD 于点 G , 连接 EG , 则在平面 $EACF$ 中, AF 与 EG 相交, 设交点为 H , 则由 $AC \parallel EF$ 可得: $\frac{AG}{EF} = \frac{AH}{HF}$, 又 $\because \frac{AG}{EF} = \frac{AG}{AC} = \frac{AD}{AD+BC}$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

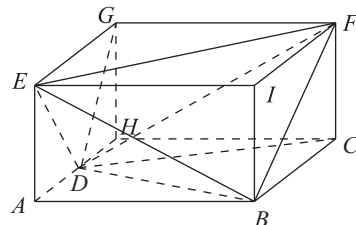
$$\therefore \frac{AH}{HF} = \frac{1}{3},$$


该七面体的体积等于 $V_{E-ABD} + V_{F-BED} + V_{F-BCD}$
 $= V_{E-ABD} + 3V_{A-BED} + 2V_{E-ABD} = 6V_{E-ABD}$
 $= 6 \times \frac{1}{3} \times 4 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 16. \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

方法二: 将该七面体补成如图所示的长方体;

$$V_{ABCH-EIFG} - V_{B-EFI} - V_{F-EGD} - V_{D-FCHG} = 2 \times 4 \times 4 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times 4 -$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times 2 - \frac{1}{3} \times 4 \times 2 \times 2 = 32 - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} - \frac{16}{3} = 16$$



方法三: 建立空间直角坐标系, 利用空间向量求点 F 到平面 BED 的距离
 后求三棱锥 $F-BED$ 的体积. (参照给分)

19. 【解析】

(1)

	不太熟悉	比较熟悉	合计
男性	120	80	200
女性	140	160	300
合计	260	240	500

$\dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$$\therefore K^2 = \frac{500(120 \times 160 - 140 \times 80)^2}{260 \times 240 \times 200 \times 300} \approx 8.547 > 6.635.$$

$\therefore$ 有 99% 的把握认为该企业员工对消防知识的了解程度与性别有关. $\dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

(2) A, B 在一轮比赛中积 1 分的概率为:

$$P = C_2^1 P_1 (1 - P_1) C_2^2 (P_2)^2 + C_2^2 (P_1)^2 C_2^1 P_2 (1 - P_2) + C_2^2 (P_1)^2 C_2^2 (P_2)^2$$

$$= 2P_1 P_2 (P_1 + P_2) - 3(P_1 P_2)^2, \dots\dots\dots (7 \text{ 分})$$

$$\text{又} \because P_1 + P_2 = 1, 0 \leq P_2 \leq 1, \text{ 则 } P_1 P_2 = (1 - P_2) P_2 \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

$$\therefore P = 2P_1 P_2 - 3(P_1 P_2)^2 = -3\left(P_1 P_2 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}, \text{ 且 } 0 \leq P_1 P_2 \leq \frac{1}{4}, \dots\dots\dots (8 \text{ 分})$$

$$\therefore P_{\max} = \frac{5}{16}, \text{ 此时 } P_1 P_2 = \frac{1}{4}, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

设 A, B 所在的小组在 n 轮比赛中的积分为 ξ , 则 $\xi \sim B(n, p)$,

$$\therefore E\xi = \frac{5}{16}n \geq 5, \therefore n \geq 16, \text{ 所以理论上至少要进行 16 轮比赛. } \dots\dots\dots (12 \text{ 分})$$

20. 【解析】

$$(1) f(x) \text{ 的定义域为 } (-1, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x+1} + 2mx, \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

$$\therefore f'(1) = \frac{1}{2} + 2m = \frac{13}{2}, \therefore m = 3, \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x+1} + 6x = \frac{6x^2 + 6x + 1}{x+1},$$

令 $f'(x)=0$, 得 $x_1=\frac{-3-\sqrt{3}}{6}>-1, x_2=\frac{-3+\sqrt{3}}{6}$,

令 $f'(x)>0$, 得 $-1<x<x_1$ 或 $x>x_2$; 令 $f'(x)<0$, 得 $x_1<x<x_2$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, x_1)$ 和 $(x_2, +\infty)$ 上单调递增, 在 (x_1, x_2) 上单调递减,

即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(-1, \frac{-3-\sqrt{3}}{6}\right)$ 和 $\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{6}, +\infty\right)$,

单调递减区间为 $\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{6}, \frac{-3+\sqrt{3}}{6}\right)$ (6 分)

(2) 由题意知 $g(x)=\ln(x+1)+mx^2-\sin x, g(0)=0, g'(x)=\frac{1}{1+x}+2mx-\cos x, g'(0)=0$,

令 $h(x)=g'(x)$, 则 $h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x, h'(0)=2m-1$ (7 分)

若 $0<m<\frac{1}{2}$, 因为当 $x\in\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y=-\frac{1}{(1+x)^2}$ 单调递增, 所以 $h'(x)$ 在 $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增.

又因为 $h'(0)=2m-1<0, h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2m+1-\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}>0$,

因此存在 $x_0\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $h'(x_0)=0$,

所以当 $x\in(-1, x_0)$ 时, $h'(x)<h'(x_0)=0, g'(x)=h(x)$ 在 $(-1, x_0)$ 上单调递减, 又 $g'(0)=h(0)=0$,

所以当 $x\in(-1, 0)$ 时, $g'(x)>0$; 当 $x\in(0, x_0)$ 时, $g'(x)<0$,

所以 $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 符合题意. (10 分)

若 $m\geq\frac{1}{2}$, 当 $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $h'(x)=2m-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x\geq 1-\frac{1}{(1+x)^2}+\sin x>0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, $g'(x)>g'(0)=0, g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 因此 $x=0$ 不可能是 $g(x)$ 的极大值点. (11 分)

综上, 当 $x=0$ 是 $g(x)$ 的极大值点时, m 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (12 分)

21.【解析】

(1) 当 P 为椭圆 E 的上顶点时, $|PF_1|=a, \therefore |MF_2|=|PM|=|MF_1|+a$,

又因为 $|MF_1|+|MF_2|=2a, \therefore |MF_1|=\frac{a}{2}, |PM|=|MF_2|=\frac{3a}{2}$,

所以 $\cos\angle MPN=\frac{PM^2+PF_2^2-MF_2^2}{2PM\cdot PF_2}=\frac{\left(\frac{3}{2}a\right)^2+a^2-\left(\frac{3}{2}a\right)^2}{2\cdot\frac{3}{2}a\cdot a}=\frac{1}{3}$,

所以 $\cos\angle MPN=1-2\sin^2\angle MPO=\frac{1}{3}, \therefore \sin\angle MPO=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\therefore e=\frac{\sqrt{3}}{3}$ (5 分)

(2) 方法一: 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \overrightarrow{PF_1}=\lambda\overrightarrow{F_1M}, \overrightarrow{PF_2}=\mu\overrightarrow{F_2N}, (\lambda, \mu>0)$

$\therefore (-c-x_0, -y_0)=\lambda(x_1+c, y_1), (c-x_0, -y_0)=\mu(x_2-c, y_2),$

$\therefore x_1=-\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right), y_1=-\frac{y_0}{\lambda},$

又 $\because$ 点 P 在椭圆上, 则 $\frac{\left(\frac{x_0+c}{\lambda}+c\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{y_0}{\lambda}\right)^2}{b^2}=1$,

$$\therefore \left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}\right)+\frac{2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2}{a^2}=\lambda^2, \text{ 又 } \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1,$$

$$\therefore 2c(1+\lambda)x_0+c^2(1+\lambda)^2=(\lambda^2-1)a^2=3c^2(\lambda^2-1),$$

$$\therefore \lambda=\frac{x_0+2c}{c}, \text{ 同理 } \mu=\frac{x_0-2c}{-c}=\frac{2c-x_0}{c} \text{ (用“}-c\text{”代替“}c\text{”)},$$

$$\therefore \lambda+\mu=4, \dots\dots\dots (10 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}=\frac{|PF_1| \cdot |PF_2|}{|PM| \cdot |PN|}=\frac{\lambda\mu}{(\lambda+1)(\mu+1)}=\frac{\lambda\mu}{\lambda\mu+5}=\frac{1}{1+\frac{5}{\lambda\mu}},$$

又 $\lambda+\mu \geq 2\sqrt{\lambda\mu}$, $\therefore \lambda\mu \leq 4$, 所以 $\frac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle PMN}}$ 的最大值为 $\frac{4}{9}$. $\dots\dots\dots (12 \text{ 分})$

方法二: 设 $P(x_0, y_0), M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \overrightarrow{PF_1}=\lambda \overrightarrow{F_1M}, \overrightarrow{PF_2}=\mu \overrightarrow{F_2N}$,

$$\therefore \begin{cases} x_0+\lambda x_1=-c(1+\lambda) \\ y_0+\lambda y_1=0 \end{cases}, \begin{cases} x_0+\mu x_2=c(1+\mu) \\ y_0+\mu y_2=0 \end{cases},$$

由 $\begin{cases} 2x_0^2+3y_0^2=3b^2 \\ 2x_1^2+3y_1^2=3b^2 \end{cases}$ 得 $2x_0^2+3y_0^2-\lambda^2(2x_1^2+3y_1^2)=3b^2(1-\lambda^2)$,

即 $2(x_0+\lambda x_1)(x_0-\lambda x_1)+3(y_0+\lambda y_1)(y_0-\lambda y_1)=3b^2(1-\lambda^2)$,

$$\therefore 2(-c-\lambda c)(x_0-\lambda x_1)=3b^2(1-\lambda^2), \text{ 即 } x_0-\lambda x_1=\frac{3b}{\sqrt{2}}(\lambda-1), \text{ 同理 } x_0-\lambda x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu),$$

$$\therefore \lambda x_1-\mu x_2=\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\mu)+\frac{3b}{\sqrt{2}}(1-\lambda)=3c(2-\lambda-\mu),$$

又 $\because \lambda x_1-\mu x_2=-c(1+\lambda)-c(1+\mu)=c(-2-\lambda-\mu)$,

$\therefore c(-2-\lambda-\mu)=3c(2-\lambda-\mu), \therefore \lambda+\mu=4$, 以下同解法一.

22. 【解析】(1) 根据条件, 圆 O_1 的标准直角坐标方程为 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$, 将 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$ 代入该方程并化简得圆 O_1 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta+2\sin\theta$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) $\because$ 圆 O_2 的极坐标方程为 $\rho=2R\sin\theta$, $\therefore$ 圆 O_1 和圆 O_2 都经过极点 O , 设圆 O_1 和圆 O_2 另一个交点的为 (ρ, θ) , 则 ρ, θ 满足方程组:

$$\begin{cases} \rho=4\cos\theta+2\sin\theta, \\ \rho=2R\sin\theta. \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

由题意得, $\begin{cases} \frac{3\sqrt{2}}{2}=4\cos\theta+2\sin\theta, \\ \frac{3\sqrt{2}}{2}=2R\sin\theta. \end{cases}$ 解得 $\sin\theta=\frac{3\sqrt{2}}{2R}, \cos\theta=\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4R}$,

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得, $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2R}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}-\frac{3\sqrt{2}}{4R}\right)^2=1$, 解得, $R=3$, 或 $R=15$. $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

所以, 圆 O_2 的极坐标方程是 $\rho=6\sin\theta$, 或 $\rho=30\sin\theta$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

23. 【解析】(1) 当 $a=1$ 时, $f(x)=\begin{cases} 3, & x < -1, \\ -2x+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ -3, & x > 2. \end{cases} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

当 $x < -1$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 得, $x < -1$. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

当 $-1 \leq x \leq 2$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 得, $-2x+1 \geq 1$, 解得 $-1 \leq x \leq 0$. $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

当 $x > 2$ 时, 由 $f(x) \geq 1$ 得, $-3 \geq 1$, 不等式 $f(x) \geq 1$ 解集为 $\emptyset$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

综上所述,不等式 $f(x) \geq 1$ 的解集为 $(-\infty, 0]$ 5 分

(2) $\because x \geq 1, \therefore f(x) = |2 - ax| - x - 1$ 6 分

由 $f(x) \leq x^2$ 得, $|2 - ax| - x - 1 \leq x^2$, 即 $|2 - ax| \leq x^2 + x + 1$,

$\therefore -x^2 - x - 1 \leq 2 - ax \leq x^2 + x + 1$, 7 分

$\therefore \begin{cases} ax \geq -x^2 - x + 1, \\ ax \leq x^2 + x + 3. \end{cases}$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立, 即 $\begin{cases} a \geq -x + \frac{1}{x} - 1, \\ a \leq x + \frac{3}{x} + 1. \end{cases}$ 在 $x \geq 1$ 时恒成立. 8 分

由于 $x \geq 1$ 时, $y = -x + \frac{1}{x} - 1$ 是减函数, 最大值为 -1 , $x + \frac{3}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} + 1 = 2\sqrt{3} + 1$, 等号在 $x = \sqrt{3}$ 时成立, 所以, 实数 a 的取值范围是 $[-1, 2\sqrt{3} + 1]$ 10 分